

ÜBER DIE EXISTENZ VON INZIDENZSTRUKTUREN
MIT REGULARITÄTSBEDINGUNGEN

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Mathematik
der
Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Joachim Röhmel
aus Cottbus

1972

ÜBER DIE EXISTENZ VON INZIDENZSTRUKTUREN
MIT REGULARITÄTSBEDINGUNGEN

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Mathematik
der
Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Joachim Röhmel
aus Cottbus

1. Referent : Professor Dr. H. Lenz

2. Referent : Professor Dr. R. Schneider



Tag der mündlichen Prüfung : 10. Februar 1972

Tag der Promotion :

INHALT

Einleitung	Seite	3
I. Inzidenzstrukturen		5
II. Die Regularitätsbedingungen für Inzidenzstrukturen		6
III. Endliche, normale Inzidenzstrukturen . . . mit Regularitätsbedingungen		11
IV. Unendliche, reguläre Inzidenzstrukturen . .		14
V. Eine Äquivalenzrelation und die Konstruktion der Äquivalenzklassen		17
VI. Freie Erweiterung		27
VII. Inzidenzstrukturen ohne die Bedingung (N) .		29
Literaturverzeichnis		31



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung

Dembowski hat in seiner Arbeit über "Kombinatorische Eigenschaften endlicher Inzidenzstrukturen" die Abhängigkeiten der folgenden Regularitätsbedingungen in endlichen Inzidenzstrukturen untersucht:

(R.m): Mit je m Blöcken inzidieren genau p_m Punkte, $p_m > 0$.

($\bar{R}.n$): Mit je n Punkten inzidieren genau b_n Blöcke, $b_n > 0$.*)

Eines seiner Resultate (im Wesentlichen auch schon von früheren Autoren bewiesen) war, daß aus der Gültigkeit von (R.m) und ($\bar{R}.1$) bzw. von ($\bar{R}.n$) und (R.1) die Gültigkeit von (R.1), ..., (R.m-1) bzw. von ($\bar{R}.1$), ..., ($\bar{R}.n-1$) folgt.

Eine leichte Folgerung dieser Tatsache ist, daß (R.1), ..., (R.m) und ($\bar{R}.1$), ..., ($\bar{R}.n$) gelten, wenn (R.m), ($\bar{R}.n$) und (R.1) bzw. (R.m), ($\bar{R}.n$) und ($\bar{R}.1$) erfüllt sind.

Eine Inzidenzstruktur, in der (R.1) und ($\bar{R}.1$) gelten, heißt Taktische Konfiguration.

Dembowski hat nun in [1] gezeigt, daß endliche Inzidenzstrukturen, in denen (R.1), ..., (R.m) und ($\bar{R}.1$) und ($\bar{R}.n$) mit $1 < \min(n, m)$, $2 < \max(n, m)$

gelten, bis auf eine triviale Ausnahme nicht möglich sind. Die Inzidenz in dieser trivialen Ausnahme kann so beschrieben werden, daß jeder Punkt mit genau einem Block nicht inzidiert und jeder Block mit genau einem Punkt nicht inzidiert.

In der vorliegenden Arbeit sollen nun endliche und unendliche Inzidenzstrukturen untersucht werden, die ein (R.m) und ein ($\bar{R}.n$) mit

$$1 < \min(n, m), \quad 2 < \max(n, m)$$

erfüllen. (R.1) bzw. ($\bar{R}.1$) wird also nicht vorausgesetzt.

*) Bezeichnungen wie in Dembowski [2]

Es zeigt sich, daß die folgende Normalitätsbedingung (N) eine wichtige Rolle spielt:

(N) : Kein Block inzidiert mit allen Punkten, und kein Punkt inzidiert mit allen Blöcken.

Wie einfach die Inzidenz beschaffen ist, wenn $(R.m)$ und $(\bar{R}.n)$ mit $1 < \min(n,m)$, $2 < \max(n,m)$ gelten und wenn (N) nicht gilt, zeigt Abschnitt VII.

Die übrigen Abschnitte beschäftigen sich mit Inzidenzstrukturen, in denen (N) gilt.

Für endliche Inzidenzstrukturen können wir ein Ergebnis von Dembowski verallgemeinern: Es gibt, bis auf eine triviale Ausnahme, keine Inzidenzstruktur, in der (N), $(R.m)$ und $(\bar{R}.n)$ gelten mit $1 < \min(n,m)$, $2 < \max(n,m)$.

Für unendliche Inzidenzstrukturen, die (N), $(R.m)$ und $(\bar{R}.n)$ erfüllen mit $1 < \min(n,m)$, $2 < \max(n,m)$ können wir beweisen:

$$1. p_m \geq n-1 \quad \text{und} \quad b_n \geq m-1$$

$$2. p_m = n-1 \iff b_n = m-1$$

In Abschnitt VI wird gezeigt, daß nichttriviale, unendliche Inzidenzstrukturen existieren, wenn man für die Zahlen p_m und b_n nur die Bedingungen 1. und 2. beachtet.

Die Methoden bei der Konstruktion sind die gleichen wie bei der Freien Erweiterung einer Teilebene.^{*)}

*) vgl. etwa Pickert [1]

I. Inzidenzstrukturen

Unter einer Inzidenzstruktur versteht man ein Tripel $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$, wobei $\mathcal{P} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ und $I \subset \mathcal{P} \times \mathcal{B}$.

Die Elemente von $\mathcal{P}$ heißen Punkte, die von $\mathcal{B}$ heißen Blöcke. Eine Inzidenzstruktur heißt endlich, wenn $\mathcal{P}$ und $\mathcal{B}$ endliche Mengen sind.

Ein Punkt $x \in \mathcal{P}$ inzidiert mit einem Block $X \in \mathcal{B}$, wenn $(x, X) \in I$.
 Punkt $x \in \mathcal{P}$, wenn $(x, X) \in I$.

Man schreibt auch xIX oder XIx .

Eine Teilmenge $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$ inzidiert mit einer Teilmenge $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$, wenn $\mathcal{C} \times \mathcal{L} \subset I$. Man schreibt auch $\mathcal{C}I\mathcal{L}$ oder $\mathcal{L}I\mathcal{C}$.

Für jede Teilmenge $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$ wird definiert:

$$(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{P} \mid xI\mathcal{L}\} \quad \text{bzw.} \quad (\mathcal{C}) = \{X \in \mathcal{B} \mid \mathcal{C}IX\}$$

$$[\mathcal{L}] = |(\mathcal{L})| \quad [\mathcal{C}] = |(\mathcal{C})|$$

= Anzahl der mit $\mathcal{L}$

= Anzahl der mit $\mathcal{C}$

inzidierenden Punkte

inzidierenden Blöcke

Lemma 1:

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{C} \Rightarrow (\mathcal{L}) \supset (\mathcal{C})$$

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{L} \Rightarrow (\mathcal{C}) \supset (\mathcal{L})$$

$$(\mathcal{L} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{L}) \cap (\mathcal{C})$$

$$(\mathcal{C} \cup \mathcal{L}) = (\mathcal{C}) \cap (\mathcal{L})$$

$$\mathcal{C}I\mathcal{L} \Leftrightarrow \mathcal{L} \subset (\mathcal{C})$$

$$\mathcal{C}I\mathcal{L} \Leftrightarrow \mathcal{C} \subset (\mathcal{L})$$

$$((\mathcal{L})) \supset \mathcal{L}, (((\mathcal{L}))) = (\mathcal{L}) \quad ((\mathcal{C})) \supset \mathcal{C}, (((\mathcal{C}))) = (\mathcal{C})$$

Der Beweis von Lemma 1 folgt leicht aus der Definition von $(\mathcal{L})$ und $(\mathcal{C})$.

Ist die Inzidenzstruktur endlich, so wird definiert:

$$p_j = \binom{b_0}{j} \sum_{|\mathcal{L}|=j}^1 [\mathcal{L}], \quad j = 1, \dots, b_0. \quad b_i = \binom{p_0}{i} \sum_{|\mathcal{C}|=i}^1 [\mathcal{C}], \quad i = 1, \dots, p_0$$

b_0 = Anzahl der Blöcke von $\mathcal{B}$, p_0 = Anzahl der Punkte von $\mathcal{P}$.

Satz 1: (Dembowski [1], Seite 261)

$$p_j \cong p_{j+1}, \quad j = 1, \dots, b_0 - 1$$

$$b_i \cong b_{i+1}, \quad i = 1, \dots, p_0 - 1$$

$$p_j = p_{j+1} \Leftrightarrow p_j = p_{b_0}$$

$$b_i = b_{i+1} \Leftrightarrow b_i = b_{p_0}$$

Laut Definition ist p_{b_0} (bzw. b_{p_0}) die Anzahl der Punkte

(bzw. der Blöcke), die mit jedem Block (bzw. Punkt) inzidieren.

Beweis: Es wird die Behauptung über die b_i gezeigt. Der zweite Teil der Behauptung geht dann analog.

$b_1 \cong b_{i+1}$ siehe Dembowski [1].

$$b_i = b_{i+1} \iff \sum_{x \in \mathcal{B}} (p_0 - [x]) \binom{[x]}{i} = 0$$

(siehe ebenfalls Dembowski [1], Seite 261)

$$\iff (p_0 - [x]) \binom{[x]}{i} = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathcal{B}$$

$$\implies (p_0 - [x]) \binom{[x]}{i+1} = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathcal{B}$$

$$\iff \sum_{x \in \mathcal{B}} (p_0 - [x]) \binom{[x]}{i+1} = 0$$

$$\iff b_{i+1} = b_{i+2}$$

b_{p_0} ist laut Definition die Anzahl der Blöcke, die mit jedem Punkt inzidieren.

Definition: Eine Inzidenzstruktur heißt normal, wenn es keinen Punkt gibt, der mit allen Blöcken inzidiert, und wenn es keinen Block gibt, der mit allen Punkten inzidiert.

Korollar: In einer endlichen normalen Inzidenzstruktur gibt es Zahlen i_0, j_0 , $1 \leq i_0 \leq p_0$, $1 \leq j_0 \leq b_0$, so daß gilt:

$$b_1 > \dots > b_{i_0} = \dots = b_{p_0} = 0, \quad p_1 > \dots > p_{j_0} = \dots = p_{b_0} = 0$$

II. Die Regularitätsbedingungen für Inzidenzstrukturen

(R.m) : Ist $\mathcal{L}$ eine m-elementige Blockmenge, so gilt $[\mathcal{L}] = p_m > 0$
 p_m ist für alle m-elementigen Blockmengen dieselbe Zahl.

(R.n) : Ist $\mathcal{C}$ eine n-elementige Punktmenge, so gilt $[\mathcal{C}] = b_n > 0$
 b_n ist für alle n-elementigen Punktmengen dieselbe Zahl.

Im Falle der Endlichkeit der Inzidenzstruktur stimmen die hier definierten Zahlen p_m, b_n mit den im Anschluß an Lemma 1 definierten überein.

Satz 2:

Eine normale Inzidenzstruktur erfülle (R.m) bzw. (R.n) für ein m bzw. ein n. Dann gilt:

1. $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}, |\mathcal{L}| = m-1 \Rightarrow [\mathcal{L}] > p_m$ bzw.
 $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}, |\mathcal{C}| = n-1 \Rightarrow [\mathcal{C}] > b_n$
2. $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}, |\mathcal{L}| \leq m-1 \Rightarrow ((\mathcal{L})) = \mathcal{L}$ bzw.
 $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}, |\mathcal{C}| \leq n-1 \Rightarrow ((\mathcal{C})) = \mathcal{C}$

Beweis: Zu 1.: Angenommen es gibt $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}, |\mathcal{L}| = m-1$ und $[\mathcal{L}] = p_m$. Nach Lemma 1 gilt für jedes $X \in \mathcal{B}$:

$$p_m = |(\mathcal{L} \cup \{X\})| = |(\mathcal{L}) \cap (\{X\})|.$$

Wegen $|(\mathcal{L})| = p_m$ folgt also $(\{X\}) \supset (\mathcal{L})$ für alle $X \in \mathcal{B}$.
 $\Rightarrow XI(\mathcal{L})$ für alle $X \in \mathcal{B}$, $\Rightarrow BI(\mathcal{L}) \Rightarrow$ Widerspruch zur Normalität der Inzidenzstruktur.

Zu 2.: Durch Induktion: Sei $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}, |\mathcal{L}| = m-1$ und $\mathcal{J} = ((\mathcal{L})) \neq \mathcal{L}$
 $\Rightarrow |\mathcal{J}| \geq m \Rightarrow p_m \geq |(\mathcal{J})| = |(((\mathcal{L}))))| = |(\mathcal{L})|.$
 $\Rightarrow$ Widerspruch zu 1.

Ist die Behauptung schon für ein k mit $1 < k \leq m-1$ bewiesen, so gilt für k-1:

Es sei $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}, |\mathcal{L}| = k-1$ und $X \in \mathcal{B}$ so gewählt, daß $X \notin ((\mathcal{L}))$. Daß diese Wahl möglich ist, folgt aus der Normalität.

Aus $((\mathcal{L} \cup \{X\})) \supset ((\mathcal{L}))$ und $((\mathcal{L} \cup \{X\})) \supset ((\{X\}))$ folgt
 $((\mathcal{L} \cup \{X\})) \supset ((\mathcal{L})) \cup ((\{X\})) \supset \mathcal{L} \cup \{X\}$

Weil $|\mathcal{L} \cup \{X\}| = k$ kann man sogar schließen
 $((\mathcal{L} \cup \{X\})) = ((\mathcal{L})) \cup ((\{X\})) = \mathcal{L} \cup \{X\}.$

$\Rightarrow ((\mathcal{L})) \subset \mathcal{L} \cup \{X\} \Rightarrow ((\mathcal{L})) \subset \mathcal{L} \Rightarrow ((\mathcal{L})) = \mathcal{L}.$

Damit ist die Behauptung auch für alle k-1-elementigen Blockmengen bewiesen.

Korollar: Erfüllt eine normale Inzidenzstruktur ein (R.m) bzw. ein (R.n) mit $m > 1$ bzw. $n > 1$, so gibt es keine zwei Blöcke bzw. zwei Punkte, die mit denselben Punkten bzw. Blöcken inzidieren.

Beweis: Angenommen, es gibt zwei Blöcke x, y , die mit denselben Punkten inzidieren, so ergänze $\{x, y\}$ zu einer m -elementigen Blockmenge $\mathcal{L}$. $\mathcal{L}$ inzidiert dann mit genau p_m Punkten, aber auch $\mathcal{L} - \{x\}$ inzidiert mit genau p_m Punkten, im Widerspruch zu Satz 2, Teil 1.

Satz 3:

Eine normale Inzidenzstruktur erfülle $(R.m)$ und $(\bar{R}.n)$.

Dann gilt:

1. $p_m < n \iff b_n < m$
2. $p_m = n-1 \iff b_n = m-1$
3. $p_m < n$ und es existiert $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$ mit $|\mathcal{L}| = m-1$
und $[\mathcal{L}] \cong n \iff b_n = m-1$

Beweis: Zu 1. $p_m \geq n \implies$ je m Blöcke inzidieren mit mindestens n Punkten. Daher gibt es n Punkte, die mit mindestens m Blöcken inzidieren, d.h., daß $b_n \geq m$.

Zu 2. Sei $p_m = n-1$. Nach Satz 2 inzidieren mit $m-1$ Blöcken mindestens $p_m+1 = n$ Punkte. Es gibt also n Punkte, die mit mindestens $m-1$ Blöcken inzidieren, d.h., daß $b_n \geq m-1$.

Weil aber schon nach 1. $b_n < m$ gelten muß, folgt also $b_n = m-1$.

Zu 3. " $\Leftarrow$ " ist durch 2. und Satz 2 bewiesen. Sei also $p_m < n$, $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$, $|\mathcal{L}| = m-1$ und $[\mathcal{L}] \cong n$. Dann gibt es n Punkte aus $(\mathcal{L})$, die mit mindestens $\mathcal{L}$ inzidieren. Daher gilt $b_n \geq m-1$, das heißt aber $b_n = m-1$.

Lemma 2: Eine normale Inzidenzstruktur erfülle $(R.m)$ und $(\bar{R}.n)$, und es gelte $p_m < n-1$. Dann ist

1. $b_n < m-1$
2. Für jede $n-1$ -elementige Punktmenge $\mathcal{C}$ gilt $b_{n+1} \leq [\mathcal{C}] < m$
3. Für jede $m-1$ -elementige Blockmenge $\mathcal{L}$ gilt $p_{m+1} \leq [\mathcal{L}] < n$

Lemma 2 ist durch Satz 2 und Satz 3 bewiesen.

Die Bedeutung von Lemma 2 liegt im folgenden

Satz 4:

Eine normale Inzidenzstruktur erfülle $(R.m)$ und $(\bar{R}.n)$ und es gelte $p_m < n-1$. Dann sind auch $(R.m-1)$ und $(\bar{R}.n-1)$ erfüllt mit $p_{m-1} = p_m+1$ und $b_{n-1} = b_n+1$.

Beweis: Wir zeigen das Erfülltsein von $(R, m-1)$ mit $p_{m-1} = p_m + 1$.
Der Rest geht dann analog.

Sei $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$, $|\mathcal{L}| = m-1$. Dann können wir für $k = [\mathcal{L}]$ nach Lemma 2 schließen:

$$p_m + 1 \leq k < n$$

Setze $\mathcal{P}' = \mathcal{P} - (\mathcal{L})$, $\mathcal{B}' = \mathcal{L}$, $I' = I \cap \mathcal{P}' \times \mathcal{B}'$.

Ist dann $e \in \mathcal{P}'$, $|e| = q$ und $n-k \leq q \leq n-p_m-1$, so gilt

$$[e]' = b_n. \quad ([e]' = |\mathcal{B}' \cap (e)|):$$

Wegen $p_m + 1 \leq n-q \leq k$ kann man $\mathcal{Z} \subset (\mathcal{L})$ so wählen, daß

$$|\mathcal{Z}| = n-q.$$

Aus $|e| = q \Rightarrow |\mathcal{Z} \cup e| = n$.

Für $\mathcal{J} = (\mathcal{Z} \cup e)$ gilt daher $|\mathcal{J}| = b_n$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= (\mathcal{Z} \cup e) = (\mathcal{Z}) \cap (e) \cup \mathcal{L} \cap (e) \\ &\Rightarrow b_n \cong [e]'. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\mathcal{Z} \subset (\mathcal{J} \cup \mathcal{L})$$

und wegen

$$|\mathcal{Z}| = n-q \leq p_m + 1$$

folgt

$$|\mathcal{J} \cup \mathcal{L}| \leq m-1$$

$$\Rightarrow \mathcal{J} \subset \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{J} \subset \mathcal{L} \cap (e)$$

$$\Rightarrow [e]' \cong b_n$$

Insgesamt also $[e]' = b_n$.

Hätte man nun für q mit $n-k \leq q \leq n-p_m-1$ verschiedene Möglichkeiten der Wahl, so wäre $(\mathcal{P}', \mathcal{B}', I')$ nach Satz 2 nicht normal, und es gäbe Blöcke aus $\mathcal{B}'$, die mit jedem Punkt aus $\mathcal{P}'$ inzidierten. Wegen $\mathcal{B}' = \mathcal{L}$ würden diese Blöcke auch mit jedem Punkt aus $(\mathcal{L})$ inzidieren und damit mit jedem Punkt aus $\mathcal{P}$. Daher wäre $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ nicht normal, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muß

$$n-k = n-p_m-1$$

oder

$$k = p_m + 1$$

gelten.

Lemma 3: Eine normale Inzidenzstruktur erfülle $(R.m)$ und $(\bar{R}.n)$ und es sei $p_m < n$. Dann gilt für $j = n - p_m$:

1. Für $0 \leq k < j$ ist $(R.m-k)$ erfüllt mit $p_{m-k} = p_m + k$
2. $m - b_n = j$
3. Für $0 \leq k < j$ ist $(\bar{R}.n-k)$ erfüllt mit $b_{n-k} = b_n + k$

Beweis: Man braucht nur 1. und 2. zu beweisen, 3. folgt dann durch Dualisieren.

Zu 1. Ist $j = 1$, so ist die Aussage von Lemma 3 identisch mit Satz 3, Teil 2. Sei also $j > 1$.

Für $k = 0$ ist die Behauptung dann richtig.

Sei die Behauptung schon für ein k mit $0 \leq k < j-1$ bewiesen.

Es gilt also $(R.m-k)$ und $(\bar{R}.n)$ und $p_{m-k} = p_m + k$.

Weil $n - p_{m-k} \geq 2$, kann man Satz 4 anwenden:

Es gilt $(R.m-k-1)$ mit $p_{m-k-1} = p_m + k + 1$.

Zu 2. Für $k = j-1$ gilt insbesondere:

$(R.m-j+1)$ ist erfüllt mit $p_{m-j+1} = p_m + j - 1 = n - 1$.

Nach Satz 3, Teil 2 schließt man daraus

$$b_n = m - j + 1 - 1 = m - j.$$

Im Fall $j = 1$ können wir die folgende Aussage machen:

Satz 5:

Eine (nicht notwendigerweise normale) Inzidenzstruktur erfülle $(R.m)$ und $(\bar{R}.n)$ mit $p_m = n-1$ und $b_n = m-1$. Gibt es dann zu zwei Blöcken X, Y einen Punkt $x_0 \in \mathcal{P}$, so daß $x \bar{I} x_0$ und $y \bar{I} x_0$, so inzidieren X und Y mit gleichvielen Punkten. Die duale Aussage ist ebenfalls richtig.

Beweis: Setze $\alpha = (\{X, Y\})$.

Aus $|\{X, Y\}| \leq m$ folgt $|\alpha| \geq p_m = n-1$.

Wähle $\mathcal{B} \subset \alpha$ mit $|\mathcal{B}| = n-2$.

Für jedes $a \in (\{X\}) - \alpha$ inzidiert dann genau eine $m-1$ -elementige Blockmenge $\mathcal{L}(a)$ mit $\{a, x_0\} \cup \mathcal{B}$.

Aus $X, Y \bar{I} x_0$ folgt $X, Y \notin \mathcal{L}(a)$.

Mit $\mathcal{L}(a) \cup \{Y\}$ inzidieren genau p_m Punkte $z(a)$, ($p_m = n-1$).

Da $\mathcal{B}$ sowohl mit Y als auch mit $\mathcal{L}(a)$ inzidiert, muß

$$\mathcal{B} \subset z(a)$$

gelten.

In $\mathcal{Z}(a)$ gibt es also genau einen Punkt $f(a) \in \mathcal{P}$, der nicht in $\mathcal{L}$ liegt. $f(a)$ inzidiert nach Konstruktion mit γ , aber nicht mit χ , denn sonst würde gelten:

$$\mathcal{L}(a) \cup \{\chi\} \cap \mathcal{L} \cup \{a, f(a)\}$$

Weil aber $\mathcal{L}(a) \cup \{\chi\}$ aus m Elementen besteht, folgt dann

$$|\mathcal{L} \cup \{a, f(a)\}| \leq n-1$$

$$\Rightarrow f(a) = a$$

$$\Rightarrow a \in \gamma$$

$$\Rightarrow a \in \alpha$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Diese Konstruktion ist umkehrbar, d.h., mit $\mathcal{C} = \{f(a), x_0\} \cup \mathcal{L}$ inzidieren genau $m-1$ Blöcke $\mathcal{J}(a)$. Da aber auch $\mathcal{L}(a)$ mit $\mathcal{C}$ inzidiert, gilt

$$\mathcal{J}(a) = \mathcal{L}(a)$$

Mit $\mathcal{L}(a) \cup \{\chi\}$ inzidiert genau noch ein nicht in $\mathcal{L}$ gelegener Punkt a' . Nun inzidieren mit $\mathcal{L}(a) \cup \{\chi\}$ die Punkte $\{a, a'\} \cup \mathcal{L}$, woraus $a = a'$ folgt.

Die Abbildung $f: (\{\chi\}) - \alpha \rightarrow (\{\gamma\}) - \alpha$ ist daher injektiv. Da es analog auch eine injektive Abbildung

$$g: (\{\gamma\}) - \alpha \rightarrow (\{\chi\}) - \alpha$$

gibt, ist Satz 5 bewiesen.

III. Endliche, normale Inzidenzstrukturen mit Regularitätsbedingungen

Für endliche Inzidenzstrukturen hat Dembowski den folgenden Satz gezeigt

Satz 6: (Dembowski [1], Seite 263)

Gilt in einer endlichen Inzidenzstruktur (R, m) und $(\bar{R}.1)$, bzw. $(\bar{R}.n)$ und $(R.1)$, so gelten auch $(R, m-1), \dots, (R.1)$, bzw. $(\bar{R}.n-1), \dots, (\bar{R}.1)$.

Lemma 4: Erfüllt eine endliche Inzidenzstruktur (R, m) und $(\bar{R}.n)$ mit $p_m = n-1$ und $b_n = m-1$, und gibt es zu je zwei Blöcken X, Y einen Punkt $x \in \mathcal{P}$, der mit beiden Blöcken nicht inzidiert, so sind auch $(R, m-1), \dots, (R.1)$ und $(\bar{R}.n-1), \dots, (\bar{R}.1)$ erfüllt.

Beweis: Kann man Satz 5 auf endliche Inzidenzstrukturen anwenden, so heißt das, daß $(R.1)$ erfüllt ist. Nach Satz 6 gilt dann auch der Rest.

Dembowski hat in derselben Arbeit auch gezeigt:

Satz 7:

Erfüllt eine endliche Inzidenzstruktur die Axiome (R.m) und $(\bar{R}.n)$, so gilt:

$$\left(\begin{matrix} [\mathcal{L}] \\ n \end{matrix} \right) (b_{n-m+1}) = \left(\begin{matrix} p_m \\ n \end{matrix} \right) (b_{o-m+1})$$

und

$$\left(\begin{matrix} [\mathcal{C}] \\ m \end{matrix} \right) (p_{m-n+1}) = \left(\begin{matrix} b_n \\ m \end{matrix} \right) (p_{o-n+1})$$

für jede Blockmenge $\mathcal{L}$ mit $|\mathcal{L}| = m-1$ und jede Punktmenge $\mathcal{C}$ mit $|\mathcal{C}| = n-1$.

Dembowski zog daraus nur den Schluß, daß diese Beziehungen zeigen, daß die Zahlen $[\mathcal{L}]$ bzw. $[\mathcal{C}]$ für $|\mathcal{L}| = m-1$ bzw. $|\mathcal{C}| = n-1$ bei Gültigkeit von (R.m) und $(\bar{R}.n)$ gewissen Gleichungen n-ten bzw. m-ten Grades genügen müssen, also höchstens n bzw. m verschiedener Werte fähig sind.

Man kann aber die Folgerungen an dieser Stelle noch weiter treiben.

Gilt zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 7 etwa noch

$$p_m \geq n,$$

so muß wegen $b_{o-m+1} > 0$ auch $b_n \geq m$ und $\left(\begin{matrix} [\mathcal{L}] \\ n \end{matrix} \right) > 0$ gelten.

Daher ist die folgende Gleichung richtig

$$\left(\begin{matrix} [\mathcal{L}] \\ n \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} p_m \\ n \end{matrix} \right) \frac{b_{o-m+1}}{b_{n-m+1}}$$

Weil aber $x \rightarrow \binom{x}{n}$ streng monoton ist, hat damit $[\mathcal{L}]$ für alle $|\mathcal{L}| = m-1$ denselben Wert, d.h., es gilt (R.m-1) mit

$$\left(\begin{matrix} p_{m-1} \\ n \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} p_m \\ n \end{matrix} \right) \frac{b_{o-m+1}}{b_{n-m+1}}$$

Aus $b_n \geq m$ schließt man ebenso auf die Gültigkeit von $(\bar{R}.n-1)$ mit

$$\left(\begin{matrix} b_{n-1} \\ m \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} b_n \\ m \end{matrix} \right) \frac{p_{o-n+1}}{p_{m-n+1}}$$

Wegen $p_{m-1} \geq p_m \geq n$ und $b_{n-1} \geq b_n \geq m$ kann man nun auf die

Gültigkeit von $(R.m-2)$ mit

$$\binom{p_{m-2}}{n} = \binom{p_{m-1}}{n} \frac{b_{o-m+2}}{b_{n-m+2}}$$

bzw. auf die Gültigkeit von $(\bar{R}.n-2)$ mit

$$\binom{b_{n-2}}{m} = \binom{b_{n-1}}{m} \frac{p_{o-n+2}}{p_{m-n+2}}$$

schließen. Es gilt

Satz 8:

Eine endliche Inzidenzstruktur, die $(R.m)$ und $(\bar{R}.n)$ erfüllt mit $p_m \geq n$ oder $b_n \geq m$, erfüllt auch $(R.m-1), \dots, (R.1)$ und $(\bar{R}.n-1), \dots, (\bar{R}.1)$.

Satz 6 ist wegen $p_m \geq 1$ eine Folge von Satz 8.

Auf Grund des eben geschilderten Sachverhaltes können wir aus Lemma 3 die Konsequenz ziehen:

Lemma 5: Eine normale, endliche Inzidenzstruktur erfülle $(R.m)$ und $(\bar{R}.n)$ und es sei $j = n - p_m \geq 2$. Dann gelten auch $(R.m-1), \dots, (R.1)$ und $(\bar{R}.n-1), \dots, (\bar{R}.1)$.

Beweis: Nach Lemma 3 können wir folgern, daß $(R.m-j+1)$ und $(\bar{R}.n-j+1)$ erfüllt sind mit

$$p_{m-j+1} = p_{m+j-1} \quad \text{und} \quad b_{n-j+1} = b_{n+j-1}.$$

Weiter gilt

$$p_{m-j+1} - (n-j+1) = j-2 \geq 0.$$

Nach Satz 8 folgt daraus die Gültigkeit von $(R.m-j), \dots, (R.1)$ und $(\bar{R}.n-j), \dots, (\bar{R}.1)$.

Wir können somit ein erstes Resultat dieser Arbeit formulieren:

Satz 9:

Es gibt bis auf eine triviale Ausnahme keine normale, endliche Inzidenzstruktur, die ein $(P.m)$ und ein $(\bar{R}.n)$ erfüllt mit

$$1 < \min(n, m), 2 < \max(n, m).$$

Die triviale Inzidenzstruktur ist dabei gegeben durch

$$p_o = n + b_n = m + p_m = b_o = N,$$

jeder Punkt inzidiert mit genau $N-1$ Blöcken und jeder Block inzidiert mit genau $N-1$ Punkten.

Beweis: Der Beweis stützt sich auf einen Satz von Dembowski.

Dembowski hat in [1] gezeigt, daß eine Taktische Konfiguration, die ein $(R.m)$ und ein $(\bar{R}.n)$ erfüllt mit $2 < \max(n,m), 1 < \min(n,m)$ notwendig im oben definierten Sinne trivial ist. Dabei ist eine Taktische Konfiguration als eine endliche Inzidenzstruktur erklärt, die $(R.1)$ und $(\bar{R}.1)$ erfüllt. Durch Satz 8 und Lemma 4 haben wir gezeigt, daß eine endliche, normale Inzidenzstruktur, die ein $(R.m)$ und ein $(\bar{R}.n)$ erfüllt mit

$$p_m \neq n-1 \quad \text{bzw.} \quad b_n \neq m-1$$

automatisch auch eine Taktische Konfiguration ist. Damit ist Satz 9 bis auf den Fall $p_m = n-1$ bzw. $b_n = m-1$ bewiesen.

Für diesen Fall benötigen wir andere Methoden, zu denen wir über Satz 5 gelangen.

Zunächst wollen wir uns aber den unendlichen Inzidenzstrukturen zuwenden.

IV. Unendliche, reguläre Inzidenzstrukturen

Satz 10:

Eine Inzidenzstruktur erfülle $(R.m)$ und $(\bar{R}.n)$ mit

$$p_m \geq n \quad \text{bzw.} \quad b_n \geq m.$$

Gibt es dann eine $m-1$ -elementige Blockmenge, die mit nur endlich vielen Punkten inzidiert, so ist $\mathcal{B}$ eine endliche Menge. Die duale Aussage ist ebenfalls richtig.

Beweis: Wir interpretieren eine Formel, die Dembowski für endliche Inzidenzstrukturen bewiesen hat (siehe Dembowski [1], Seite 264):

Sei $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$, $|\mathcal{L}| = m-1$ und $[\mathcal{L}] < \infty$

Setzen wir $\mathcal{L}' = \mathcal{B} - \mathcal{L}$, so gilt für jedes $e \in \mathcal{P}$ mit $e \cap \mathcal{L}, |e| = n$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{X \in \mathcal{L}' \\ e \cap X}} [|\mathcal{L} \cup \{x\}|] &= p_m([\mathcal{L}] - m + 1) = p_m(b_n - m + 1) \\ \Rightarrow \sum_{\substack{e \in \mathcal{L} \\ |e| = n}} \sum_{\substack{X \in \mathcal{L}' \\ e \cap X}} [|\mathcal{L} \cup \{x\}|] &= \binom{[\mathcal{L}]}{n} \cdot p_m(b_n - m + 1) \end{aligned}$$

Die linke Seite der Gleichung ist somit endlich und kann umgeformt werden in

$$\sum_{\substack{e \in \mathcal{L} \\ |e|=n}} \sum_{\substack{x \in \mathcal{L}' \\ e \in X}} [\mathcal{L} \cup \{x\}] = \sum_{x \in \mathcal{L}'} \binom{[\mathcal{L} \cup \{x\}]}{n} \cdot [\mathcal{L} \cup \{x\}]$$

$$\Rightarrow \binom{[\mathcal{L}]}{n} p_m(b_n - m + 1) = p_m \cdot \binom{p_m}{n} \cdot |\mathcal{L}'| \Rightarrow |\mathcal{L}'| < \infty$$

Bemerkung: Satz 10 zeigt, daß es keine Inzidenzstrukturen geben kann, die $(R.m)$ und $(\bar{R}.n)$ erfüllen mit $p_m \geq n$ bzw. $b_n \geq m$, und für die etwa $\mathcal{P}$ eine endliche und $\mathcal{B}$ eine unendliche Menge ist. Unter unendlichen Inzidenzstrukturen wollen wir also nur solche mit unendlicher Punktmenge und unendlicher Blockmenge verstehen. Unter den Voraussetzungen von Satz 10 gilt dann, daß je $m-1$ Blöcke mit unendlich vielen Punkten und je $n-1$ Punkte mit unendlich vielen Blöcken inzidieren. In diesen Inzidenzstrukturen kann somit kein $(R.j)$ für $1 \leq j \leq m-1$ und kein $(\bar{R}.k)$ für $1 \leq k \leq n-1$ erfüllt sein.

Lemma 6: Erfüllt eine normale, unendliche Inzidenzstruktur $(R.m)$ und $(\bar{R}.n)$ mit $p_m < n$ bzw. $b_n < m$, so gilt

$$1 \leq n - p_m = m - b_n \leq 2$$

Beweis: Angenommen, es wäre $j = n - p_m > 2$, so könnte man nach Lemma 3 auf die Gültigkeit von $(R.m-j+1)$ mit $p_{m-j+1} = p_m + j - 1 = n - 1$, $(\bar{R}.n-1)$ und mindestens noch $(\bar{R}.n-2)$ schließen, was nach Satz 10 ein Widerspruch zur Unendlichkeit der Inzidenzstruktur darstellt.

Satz 11:

Es gibt keine Inzidenzstruktur, die endlich und normal ist und $(R.m)$ und $(\bar{R}.n)$ erfüllt mit $p_m = n-2$ bzw. $b_n = m-2$

Beweis: Nach Lemma 3 müsste eine solche Inzidenzstruktur auch $(R.m-1)$ und $(\bar{R}.n-1)$ erfüllen mit $p_{m-1} = n-1$ und $b_{n-1} = m-1$.

Es seien nun $B_1, \dots, B_{m-1}$ $m-1$ Blöcke aus $\mathcal{B}$ und $\{x_1, \dots, x_{n-1}\} \perp \{B_1, \dots, B_{m-1}\}$

Für jedes $B \in \mathcal{B} \setminus \{B_1, \dots, B_{m-1}\}$ folgt:

$$(\{B_1, \dots, B_{m-1}\}) \supset (\{B_1, \dots, B_{m-1}, B\})$$

Weil außerdem $[\{B_1, \dots, B_{m-1}, B\}] = n-2$ ist, kann man schließen, daß jeder Block B mit genau einem Punkt von $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ nicht inzidiert.

Seien B_m und B_{m+1} so gewählt, daß

$$B_m \not\vdash x_{n-1} \text{ und } B_{m+1} \not\vdash x_{n-2}$$

Dann inzidieren $B_1, \dots, B_{m+1}$ mit $x_1, \dots, x_{n-3}$

Es gibt also noch genau einen Punkt y_i , $y_i \neq x_1, \dots, x_{n-1}$, so daß

$$\{B_1, \dots, B_{m+1}\} - \{B_{m-i}\} \vdash \{y_i, x_1, \dots, x_{n-3}\}, i=1, \dots, m-1.$$

B_{m-i} inzidiert nicht mit y_i , denn das Gegenteil hätte

$$\{B_1, \dots, B_m\} \vdash \{y_i, x_1, \dots, x_{n-2}\}$$

zur Folge, was einen Widerspruch zu (R.m) darstellen würde.

	x_1	x_2	...	x_{n-3}	x_{n-2}	x_{n-1}	y_1	y_2	...	y_i	...	y_{m-2}	y_{m-1}	y_m
B_1	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	*	
B_2	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	*	Δ	
$\vdots$	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	*	Δ	Δ	Δ
B_{m-i}	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	*	Δ	Δ	Δ	Δ
$\vdots$	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	*	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ
B_{m-2}	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	*	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ
B_{m-1}	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	*	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ
B_m	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	*	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ
B_{m+1}	Δ	Δ	Δ	Δ	*	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ
B_{m+2}	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	*	*	*	*	*	*	*	*	Δ

(Δ bedeutet, daß Inzidenz stattfindet, * bedeutet, daß Inzidenz nicht stattfindet.)

Es sei B_{m+2} ein weiterer Block, der mit $x_1, \dots, x_{n-2}$

inzidiert. Nach Satz 10 gibt es unendlich viele solcher Blöcke.

B_{m+2} inzidiert nicht mit x_{n-1} oder $\gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}$, denn das Gegenteil hätte

$$x_1, \dots, x_{n-1} \cap B_1, \dots, B_{m-1}, B_{m+2}$$

bzw.

$$x_1, \dots, x_{n-2}, \gamma_i \cap B_1, \dots, B_{m-i-1}, B_{m-i+1}, \dots, B_m, B_{m+2}$$

zur Folge, was einen Widerspruch zu (R.m) darstellen würde.

Mit $B_3, \dots, B_{m+2}$ inzidieren jetzt die Punkte $x_1, \dots, x_{n-3}$

und inzidieren nicht die Punkte $x_{n-2}, x_{n-1}, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}$.

Weil (R.m) erfüllt ist, gibt es somit genau einen Punkt

$$\gamma_m \in \mathcal{P} \quad \gamma_m \neq x_1, \dots, x_{n-1}, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}$$

$$\text{und} \quad \gamma_m \cap B_3, \dots, B_{m+2}$$

Dann gilt aber auch

$$B_3, \dots, B_{m+1} \cap x_1, \dots, x_{n-3}, \gamma_{m-2}, \gamma_{m-1}, \gamma_m$$

Wir haben somit $m-1$ Blöcke gefunden, die mit n Punkten inzidieren, was einen Widerspruch zu (R.m-1) darstellt.

Wie im endlichen Fall bleiben also noch die Inzidenzstrukturen zu untersuchen, für die (R.m) und $(\bar{R}.n)$ gilt mit

$$p_m = n-1 \quad \text{bzw.} \quad b_n = m-1.$$

Für einen gewissen Teil der folgenden Untersuchungen spielt es wieder keine Rolle, ob die Inzidenzstruktur endlich oder unendlich ist.

V. Eine Äquivalenzrelation und die Konstruktion der Äquivalenzklassen

Im Hinblick auf Satz 5 führen wir die folgende Relation auf der Menge der Punkte bzw. auf der Menge der Blöcke ein:

$$x \pi y \iff \text{es gibt ein } A \in \mathcal{B}, \text{ so daß } x \notin A \text{ und } y \notin A$$

$$X \pi Y \iff \text{es gibt ein } a \in \mathcal{P}, \text{ so daß } a \notin X \text{ und } a \notin Y$$

Die Relation π ist genau dann reflexiv, wenn die Inzidenzstruktur normal ist.

Die Relation π ist symmetrisch, sowohl für die Punkte, als auch für die Blöcke.

Man zeigt nun leicht, daß durch die folgende Definition eine Äquivalenzrelation definiert wird:

$x \sim y \iff$ es gibt eine endliche Kette $x_0, \dots, x_s$ von Punkten mit $x_0 = x$, $x_s = y$ und $x_i \pi x_{i+1}$, $i = 0, \dots, s-1$.

$X \sim Y \iff$ es gibt eine endliche Kette $X_0, \dots, X_t$ von Blöcken mit $X_0 = X$, $X_t = Y$ und $X_i \pi X_{i+1}$, $i = 0, \dots, t-1$.

In normalen Inzidenzstrukturen gilt

Satz 12:

Ist $\mathcal{C}$ eine Äquivalenzklasse in der Menge der Punkte und $\mathcal{L} = \mathcal{B} - (\mathcal{C})$, so ist $\mathcal{L}$ eine Äquivalenzklasse in der Menge der Blöcke, und es gilt $\mathcal{C} = \mathcal{P} - (\mathcal{L})$. Die analoge Behauptung gilt ebenfalls, wenn man von einer Äquivalenzklasse in der Menge der Blöcke ausgeht.

Beweis: Es sei $\mathcal{C}$ eine Äquivalenzklasse in der Menge der Punkte und $\mathcal{L} = \mathcal{B} - (\mathcal{C})$. Es seien weiter $X, Y \in \mathcal{L}$

$\Rightarrow X, Y \notin (\mathcal{C})$

$\Rightarrow$ es existieren $x_X, x_Y \in \mathcal{C}$ und $x_X \nexists X, x_Y \nexists Y$.

, $\Rightarrow$ es gibt eine endliche Kette $x_0, \dots, x_s$ und

$x_i \pi x_{i+1}$, $i = 0, \dots, s-1$, $x_0 = x_X, x_s = x_Y$.

$\Rightarrow$ es gibt Blöcke C_{i+1} , $i = 0, \dots, s-1$, so daß

$x_i, x_{i+1} \nexists C_{i+1}$, $i = 0, \dots, s-1$.

Setze $C_0 = X$, $C_{s+1} = Y$, dann gilt

$C_i \pi C_{i+1}$, $i = 0, \dots, s$

$\Rightarrow X \sim Y$.

Sei jetzt $X \in \mathcal{L}$ und $Y \in \mathcal{B}$ und $X \sim Y$. Dann existiert eine endliche Kette $C_0, \dots, C_t$, $X = C_0$, $Y = C_t$ und

$C_i \pi C_{i+1}$, $i = 0, \dots, t-1$

$\Rightarrow$ es gibt Punkte x_{i+1} , $i = 0, \dots, t-1$ so daß

$C_i, C_{i+1} \nexists x_{i+1}$, $i = 0, \dots, t-1$.

Aus $X \in \mathcal{L} \Rightarrow$ es existiert $x_X \in \mathcal{P}$ und $x_X \nexists X$

$\Rightarrow x_X \pi x_1 \pi \dots \pi x_t \Rightarrow x_t \in \mathcal{C} \Rightarrow Y = C_t \in \mathcal{L}$.

Damit ist insgesamt bewiesen, daß $\mathcal{L}$ eine Äquivalenzklasse in der Menge der Blöcke ist.

Sei $z = \mathcal{P}^-(\mathcal{L})$, so ist, analog zu dem eben Bewiesenen, z eine Äquivalenzklasse in der Menge der Punkte.

Sei $y \in z \Rightarrow$ es gibt $x \in \mathcal{L}$ und $y \neq x$.

$x \in \mathcal{L} \Rightarrow$ es gibt $x \in \mathcal{C}$ und $x \neq x \Rightarrow x \pi y$.

Insgesamt also: $x \pi y \Rightarrow z \cap \mathcal{C} \neq \emptyset \Rightarrow z = \mathcal{C}$.

Damit hat bezüglich " $\sim$ " die Menge der Punkte genausoviele Äquivalenzklassen, wie die Menge der Blöcke.

Zur Konstruktion der Äquivalenzklassen:

Sei $B \in \mathcal{B}$

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}_0 = \{B\} & \mathcal{C}_0 = \mathcal{P}^-(\mathcal{L}_0) \\ \mathcal{L}_1 = \mathcal{B} - (\mathcal{C}_0) & \mathcal{C}_1 = \mathcal{P}^-(\mathcal{L}_1) \\ \vdots & \\ \mathcal{L}_n = \mathcal{B} - (\mathcal{C}_{n-1}) & \mathcal{C}_n = \mathcal{P}^-(\mathcal{L}_n) \\ \vdots & \end{array}$$

Lemma 7: Es gilt $\mathcal{L}_n \subset \mathcal{L}_{n+1}$ und $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Beweis: durch vollständige Induktion

Angenommen es gilt $\mathcal{L}_0 \not\subset \mathcal{L}_1 \Leftrightarrow B \notin \mathcal{L}_1 \Leftrightarrow B \in (\mathcal{C}_0) \Leftrightarrow \mathcal{C}_0 \cap B \neq \emptyset \Rightarrow$ Widerspruch zur Definition von $\mathcal{C}_0$.

Sei schon für ein $n \geq 0$ $\mathcal{L}_n \subset \mathcal{L}_{n+1}$ bewiesen.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (\mathcal{L}_n) \supset (\mathcal{L}_{n+1}) \\ &\Rightarrow \mathcal{C}_n = \mathcal{P}^-(\mathcal{L}_n) \subset \mathcal{P}^-(\mathcal{L}_{n+1}) = \mathcal{C}_{n+1} \\ &\Rightarrow (\mathcal{C}_n) \supset (\mathcal{C}_{n+1}) \\ &\Rightarrow \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathcal{L}_{n+2}. \end{aligned}$$

Für eine Inzidenzstruktur unterscheiden wir die beiden Fälle:

Fall α) $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1$

Fall β) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\mathcal{L}_k \neq \mathcal{L}_{k+1}$ oder es gilt $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}_{k+1}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ($k > 0$).

Wir wollen nun Fall α) und Fall β) unter der Voraussetzung untersuchen, daß $(R.m)$ und $(\bar{R}.n)$ erfüllt sind mit

$$p_m = n-1 \quad \text{und} \quad b_n = m-1$$

und $1 < \min(n,m)$, $2 < \max(n,m)$.

Wir wollen weiterhin annehmen, daß die Inzidenzstrukturen normal sind.

Fall α)

Lemma 8: Ist eine Äquivalenzklasse $\mathcal{L}$ in der Menge der Blöcke einelementig, so auch die zugehörige Äquivalenzklasse $\mathcal{C} = \mathcal{P}(\mathcal{L})$ in der Menge der Punkte. Die analoge Behauptung ist auch richtig

Beweis: Sei $\mathcal{L} = \{\mathcal{B}\}$, d.h. $\{\mathcal{B}\} = \mathcal{B} - (\mathcal{C})$

Wegen $|\mathcal{B} - \{\mathcal{B}\}| \cong m$ gibt es m von $\mathcal{B}$ verschiedene Blöcke. Diese inzidieren ganz sicher mit $\mathcal{C}$, woraus $|\mathcal{C}| \leq n-1$ folgt.

Für $n = 2$ ist die Behauptung damit schon bewiesen.

Für $n > 2$ geht der Beweis so weiter:

Wir nehmen an, daß $|\mathcal{C}| = q \cong 2$ richtig ist, und werden diese Annahme zu einem Widerspruch führen.

Zunächst werden wir zeigen, daß es unter diesen Voraussetzungen für die Wahl einer Zahl j mit der folgenden Bedingung mindestens zwei Möglichkeiten der Wahl gibt:

"Es gibt j Punkte aus $\mathcal{C}$ und $n-j$ Punkte aus $(\{\mathcal{B}\})$."

Wegen $2 \leq q \leq n-1$ ist das im nichtendlichen Fall sofort erfüllbar, nämlich $j = 1$, $j = 2$.

Im endlichen Fall muß j die Bedingungen erfüllen

$$1 \leq j \leq q \quad \text{und} \quad 1 \leq n-j \leq p_0 - q$$

$$\text{d.h.} \quad 1 \leq j \leq q \quad \text{und} \quad n+q-p_0 \leq j \leq n-1$$

$$\text{d.h.} \quad \max(n+q-p_0, 1) \leq j \leq \min(n-1, q)$$

Will man für j nun sogar zwei Möglichkeiten der Wahl haben, so muß man zeigen

$$\max(n+q-p_0, 1) + 1 \leq \min(n-1, q)$$

Wegen $n-1 \geq q$ sowie $2 \leq q$ und $n+q-p_0+1 \leq q$ ist die obige Ungleichung richtig.

Setze $\mathcal{B}' = \mathcal{B} - \{\mathcal{B}\} = \mathcal{B} - \mathcal{L} = (\mathcal{C})$, $\mathcal{P}' = (\mathcal{L})$, $I' = I \cap \mathcal{P}' \times \mathcal{B}'$

Wählt man nun $x_1, \dots, x_j \in \mathcal{C}$ und $x_{j+1}, \dots, x_n \in (\mathcal{L})$, so inzidieren $x_{j+1}, \dots, x_n$ mit genau $m-1$ Blöcken aus $\mathcal{B}'$, denn

$x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n$ inzidieren mit genau $m-1$ Blöcken aus $\mathcal{B}'$ und $x_1, \dots, x_j$ inzidieren mit allen Blöcken aus $\mathcal{B}'$.
 In $(\mathcal{P}', \mathcal{B}', I')$ gilt also $(\bar{R}.n-j)$ mit $b_{n-j} = m-1$ für mindestens zwei verschiedene j . Nach Satz 2 ist damit $(\mathcal{P}', \mathcal{B}', I')$ nicht normal und es gibt $m-1$ Blöcke, die mit allen Punkten von $\mathcal{P}'$ inzidieren. Weil $\mathcal{B}' = (\mathcal{C})$, so inzidieren die $m-1$ Blöcke auch mit $\mathcal{C}$ und damit auch mit $\mathcal{P}$, woraus folgt, daß $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ nicht normal ist im Widerspruch zur Voraussetzung. Es muß also $q = 1$ gelten.

Satz 13:

Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ eine normale Inzidenzstruktur, in der $(R.m)$ und $(\bar{R}.n)$ erfüllt sind mit $p_m = n-1$ und $b_n = m-1$. Es existiere eine einelementige Äquivalenzklasse $\{B\}$ in der Menge der Blöcke und es sei $\{x\} = \mathcal{P} \sim \{B\}$ die zugehörige Äquivalenzklasse in der Menge der Punkte. Ist dann

$\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{x\}$, $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \{B\}$, $I' = I \cap \mathcal{P}' \times \mathcal{B}'$, so gilt in $(\mathcal{P}', \mathcal{B}', I')$:

1. $(\mathcal{P}', \mathcal{B}', I')$ ist normal
2. $(R.m)$ und $(\bar{R}.n)$ sind erfüllt mit $p_m = n-2 \geq 0$, $b_n = m-2 \geq 0$
3. $(R.m-1)$ und $(\bar{R}.n-1)$ sind erfüllt mit $p_{m-1} = n-1$ und $b_{n-1} = m-1$.

Beweis:

1. Wegen $\mathcal{B}' = (\{x\})$ würde aus $x \in \mathcal{B}'$ und $x I \mathcal{P}'$ sofort $x I \mathcal{P}$ folgen, im Widerspruch zur Normalität von $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$.
2. Es sei $\mathcal{J} \subset \mathcal{B}'$, $|\mathcal{J}| = m$, so inzidiert $\mathcal{J}$ mit genau $n-1$ Elementen aus $\mathcal{P}$. Unter diesen befindet sich x . Also inzidiert $\mathcal{J}$ mit genau $n-2$ Elementen aus $\mathcal{P}'$.
3. Es sei $\mathcal{J} \subset \mathcal{B}'$, $|\mathcal{J}| = m-1$, so inzidiert $\mathcal{J} \cup \{B\}$ mit genau $n-1$ Elementen aus $\mathcal{P}'$. B inzidiert mit allen Elementen aus $\mathcal{P}'$. Also inzidiert $\mathcal{J}$ mit genau $n-1$ Elementen aus $\mathcal{P}'$.

Bemerkung: Nach ihrer Definition sind p_m und b_n stets größer als Null. In Satz 13 wurde nur der Kürze der Schreibweise wegen die Null einmal zugelassen.

Lemma 9: Es gibt keine endliche, normale Inzidenzstruktur, die die Voraussetzungen von Satz 13 erfüllt mit $1 < \min(n, m)$ und $2 < \max(n, m)$, außer der trivialen Ausnahme.

Im Fall $n = m = 2$ erfüllen die Voraussetzungen nur die ausgearteten projektiven Ebenen und die triviale Ausnahme.

Beweis: Die Behauptung ist nach Lemma 5 klar, sobald

$$p_m = n-2 > 0 \text{ und } b_n = m-2 > 0.$$

Sei also o.B.d.A. $n = 2$ und $m \geq 3$. Dann gelten in (P', B', I') :

$(\bar{R}.2), (\bar{R}.1)$ mit $b_2 = m-2, b_1 = m-1$ und $(R, m-1)$ mit $p_{m-1} = 1$.

Für $m > 3$ folgt die Behauptung nun aus Satz 9, denn (P', B', I') ist eine Taktische Konfiguration. (Siehe Dembowski [1], Lemma 2)

Für $m = 3$ stellt aber (P', B', I') die projektive Ebene der Ordnung 1 dar, woraus die Trivialität von (P, B, I) folgt.

Ist nun $n = m = 2$, so gelten in (P', B', I') :

$(R, 1)$ und $(\bar{R}, 1)$ mit $p_1 = 1$ und $b_1 = 1$. Das bedeutet aber, daß (P, B, I) eine ausgeartete projektive Ebene ist.

Es ist natürlich klar, daß die Voraussetzungen von Satz 13 für $n = m = 2$ auch im unendlichen Falle nur von den ausgearteten projektiven Ebenen erfüllt werden.

Lemma 10: Es gibt keine unendliche, normale Inzidenzstruktur, die die Voraussetzungen von Satz 13 erfüllt mit

$$1 < \min(n, m) \text{ und } 2 < \max(n, m)$$

Beweis: Die Behauptung ist nach Lemma 5 und Satz 11 klar für

$$p_m = n-2 > 0 \text{ und } b_n = m-2 > 0$$

Sei also o.B.d.A. $n = 2$ und $m \geq 3$.

Sind dann $X_1, \dots, X_m$ m verschiedene Blöcke aus B' , so gibt es keinen Punkt aus P' , der mit diesen Blöcken inzidiert.

Mit je $m-1$ Blöcken inzidiert aber genau ein Punkt aus P' .

Es gelte also

$$x_i \in \{X_1, \dots, X_m\} - \{X_i\} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Ist dann y ein weiterer Punkt aus P' , so inzidiert y mit höchstens $m-2$ Blöcken aus $\{X_1, \dots, X_m\}$. Es gelte etwa $y \notin X_1, X_2$

Für x_3 gilt daher $(\{y, x_3\}) \subset \{X_4, \dots, X_m\}$

d.h. $[\{y, x_3\}] \leq m-3$,

was einen Widerspruch zu $(\bar{R}.2)$ mit $b_2 = m-2$ darstellt.

Die Menge P' ist somit endlich, im Widerspruch zur Nicht-endlichkeit von P .

Damit ist Fall α) erschöpfend behandelt. Bei den weiteren Untersuchungen können wir uns auf Inzidenzstrukturen beschränken, in denen keine einelementigen Äquivalenzklassen existieren.

Fall B)

Es gelten weiterhin die üblichen Voraussetzungen, d.h., die Inzidenzstruktur ist normal und erfüllt ein (R, m) und ein $(\bar{R}, n)$ mit $p_m = n-1$ und $b_n = m-1$.

Satz 14:

Ist $\mathcal{L}$ eine Äquivalenzklasse in der Menge der Blöcke und $\mathcal{C} = \mathcal{P}-(\mathcal{L})$, so gilt

$$|\mathcal{L}| \geq m+1 \quad \text{oder} \quad |\mathcal{C}| \geq n+1$$

Beweis: Die Behauptung ist klar, sobald $\mathcal{L}$ oder $\mathcal{C}$ eine unendliche Menge ist. Wir können also annehmen, daß $\mathcal{L}$ und $\mathcal{C}$ endliche Mengen sind.

Es sei $B \in \mathcal{L}$ und $\mathcal{L}_0 = \{B\}$. Weil $\mathcal{L}$ endlich ist, gibt es genau ein $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, sodaß

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k &= \mathcal{L}_{k+1} & \text{und} & & \mathcal{L}_j &\neq \mathcal{L}_{j+1}, & 0 \leq j < k. \\ \mathcal{L}_k &= \mathcal{L}_{k+1} & \Rightarrow & & (\mathcal{C}_k) &= (\mathcal{C}_{k-1}) \\ (\mathcal{C}_k) &= (\mathcal{C}_{k-1}) & \Rightarrow & & \mathcal{C}_{k-1} &\subset \mathcal{C}_k &\subset ((\mathcal{C}_{k-1})) \\ \mathcal{C}_k &\neq \mathcal{C}_{k-1} & \Rightarrow & & \mathcal{C}_{k-1} &\neq ((\mathcal{C}_{k-1})) \\ & & \Rightarrow & & |\mathcal{C}_{k-1}| &\geq n \\ & & \Rightarrow & & |\mathcal{C}_k| &\geq n+1. \\ \mathcal{C}_k &= \mathcal{C}_{k-1} & \Rightarrow & & (\mathcal{L}_k) &= (\mathcal{L}_{k-1}) &\text{und} & \mathcal{L}_k \neq \mathcal{L}_{k-1} \\ & & \Rightarrow & & |\mathcal{L}_{k-1}| &\geq m \\ & & \Rightarrow & & |\mathcal{L}_k| &\geq m+1. \end{aligned}$$

Satz 15:

Ist $\mathcal{P} = \bigcup_{j \in J} \mathcal{C}_j$ und $\mathcal{B} = \bigcup_{j \in J} \mathcal{L}_j$ die Zerlegung der Inzidenzstruktur nach Paaren von Äquivalenzklassen (d.h. $\mathcal{C}_j = \mathcal{P}-(\mathcal{L}_j)$ für alle $j \in J$) und ist $|J| \geq 2$, so ist die Inzidenzstruktur endlich und es gilt

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_j| &\geq m+1 & \text{und} & & |\mathcal{C}_j| &\leq n-1 & \text{für alle } j \in J \\ \text{oder} & & & & |\mathcal{C}_j| &\geq n+1 & \text{für alle } j \in J \\ |\mathcal{L}_j| &\leq m-1 & \text{und} & & & & \end{aligned}$$

Beweis: $\mathcal{L}_j = \mathcal{B}-(\mathcal{C}_j)$ und $\mathcal{C}_j = \mathcal{P}-(\mathcal{L}_j)$

$$\Rightarrow \bigcup_{\substack{j \in J \\ x \notin j}} \mathcal{L}_x = (\mathcal{C}_j) \quad \text{und} \quad \bigcup_{\substack{x \in J \\ x \neq j}} \mathcal{C}_x = (\mathcal{L}_j)$$

Nach Satz 14 ist $|e_j| \geq n+1$ oder $|L_j| \geq m+1$. Sei o.B.d.A.

$$|L_j| \geq m+1$$

$$\Rightarrow |L_j| \leq n-1$$

$$\Rightarrow |L_j| = |\bigcup_{x \in J} e_x| \leq n-1$$

$$\Rightarrow |e_x| \leq n-1 \quad \text{für alle } x \in J, x \neq j$$

Sei nun $x \in J, x \neq j \Rightarrow |L_x| \geq m+1$, weil $|e_x| \leq n-1$

$$\Rightarrow |L_x| \leq n-1$$

$$\Rightarrow |\bigcup_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda \neq x}} e_\lambda| \leq n-1$$

$$\Rightarrow |P| \leq |\bigcup_{x \in J} e_x| + |e_j| \leq 2n-2.$$

Korollar: $|J| = 1$ bedeutet nach Lemma 4, daß je zwei Blöcke mit gleichvielen Punkten inzidieren. Wir können daher schließen, daß diese Eigenschaft alle unendlichen Inzidenzstrukturen besitzen, die unter Fall B) fallen. Für endliche Inzidenzstrukturen bedeutet $|J| = 1$, daß $(R.1), \dots, (R.m)$ und $(\bar{R}.1), \dots, (\bar{R}.n)$ erfüllt sind.

Im Folgenden wollen wir die endlichen Inzidenzstrukturen mit $|J| = q \geq 2$ untersuchen. Wir zerlegen eine solche Struktur nach dem folgenden Schema:

		$P-(L_1)$	...	$P-(L_i)$	...	$P-(L_q)$
		e_1	...	e_i	...	e_q
$B-(e_1)$	L_1		Δ	Δ	Δ	Δ
...	...	Δ		Δ	Δ	Δ
$B-(e_i)$	L_i	Δ	Δ		Δ	Δ
...	...	Δ	Δ	Δ		Δ
$B-(e_q)$	L_q	Δ	Δ	Δ	Δ	

Auf Grund ihrer Konstruktion erfüllen die Teilstrukturen

$$(\mathcal{C}_i, \mathcal{L}_i, I_i), \quad I_i = I \cap \mathcal{C}_i \times \mathcal{L}_i, \quad i = 1, \dots, q$$

die Regularitätsbedingungen (R.1) und ($\bar{R}$.1), sind also Taktische Konfigurationen. Wir stellen weiter fest, daß keine der Teilstrukturen die triviale Inzidenzstruktur sein darf, weil das die Existenz einelementiger Äquivalenzklassen in der Gesamtstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ zur Folge hätte. Daraus können wir nun wieder schließen, daß jede der Teilstrukturen $(\mathcal{C}_i, \mathcal{L}_i, I_i)$ höchstens noch (R.2) und ($\bar{R}$.2) erfüllen kann. Nach Satz 9 hätte nämlich das Gegenteil die Trivialität der Struktur zur Folge.

Nach Satz 15 können wir o.B.d.A. annehmen, daß

$$|\mathcal{L}_i| \geq m+1 \quad \text{und} \quad |\mathcal{C}_i| \leq n-1$$

für alle i , $1 \leq i \leq q$, gilt. Dann beweisen wir das

Lemma 11: In der Teilstruktur $(\mathcal{C}_i, \mathcal{L}_i, I_i)$ setze man

$$k_1 = |\mathcal{L}_i| = \left| \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \mathcal{C}_j \right| \leq n-1.$$

Dann inzidieren m Blöcke aus $\mathcal{L}_i$ mit genau $n-1-k_1$ Punkten aus $\mathcal{C}_i$, und $n-k_1$ Punkte aus $\mathcal{C}_i$ inzidieren mit genau $m-1$ Blöcken aus $\mathcal{L}_i$.

Beweis: m Blöcke aus $\mathcal{L}_i$ inzidieren sicher mit $(\mathcal{L}_i)$. Weil

$$k_1 = |\mathcal{L}_i| \quad \text{und} \quad \mathcal{C}_i = \mathcal{P} - (\mathcal{L}_i),$$

ist der erste Teil der Behauptung bewiesen. Der zweite Teil ergibt sich daraus, daß man $n-k_1$ Punkte durch die k_1 Punkte aus $(\mathcal{L}_i)$ zu n Punkten ergänzt. Weil aber $(\mathcal{L}_i)$ genau mit $\mathcal{L}_i$ inzidiert, folgt daraus die Behauptung. Daß $(\mathcal{L}_i)$ genau mit $\mathcal{L}_i$ inzidiert, folgt leicht aus der Identität:

$$\begin{aligned} ((\mathcal{L}_i)) &= \left(\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \mathcal{C}_j \right) = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q (\mathcal{C}_j) \\ &= \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \left[\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^q \mathcal{L}_k \right] \\ &= \mathcal{L}_i. \end{aligned}$$

Aus Lemma 10, zusammen mit den Tatsachen, daß in $(\mathcal{C}_i, \mathcal{L}_i, I_i)$ höchstens noch (R.2) und ($\bar{R}$.2) erfüllt sind und daß $m \geq 2$ ist, ziehen wir zwei wichtige Folgerungen:

1. es gilt $1 \leq n-k_1 \leq 2$
2. wenn $n-k_1 = 2$ ist, so gilt $m = 2$

Wir müssen also noch zeigen, daß keine Inzidenzstruktur einen der denkbaren Fälle $n-k_1 = 1$ oder $n-k_1 = 2$ erfüllt.

Wir beginnen mit $n-k_1 = 2$. Hier ist also auch $m = 2$.

Die Struktur $(\mathcal{C}_i, \mathcal{L}_i, I_i)$ ist dann eine projektive Ebene, die nicht ausgeartet ist und deren Ordnung j größer ist als 1, ansonsten $(\mathcal{C}_i, \mathcal{L}_i, I_i)$ die triviale Struktur wäre.

Wähle drei nicht kollineare Punkte x_1, x_2, x_3 aus $\mathcal{C}_i$. In $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ gilt dann

$$(\{x_1, x_2, x_3\}) = (\mathcal{C}_i) = \bigcup_{j=1}^q \mathcal{L}_j$$

Wegen $3 \leq |\mathcal{C}_i| \leq n-1$ schließt man mit Satz 2:

$$\{x_1, x_2, x_3\} = ((\{x_1, x_2, x_3\})) = ((\mathcal{C}_i)) = \mathcal{C}_i.$$

Das stellt einen Widerspruch zur Ordnung $j > 1$ dar.

Sei jetzt $k_i = n-1$ für alle i , $i = 1, \dots, q$

Aus $\mathcal{C}_i = \mathcal{P} - (\mathcal{L}_i)$ folgt

$$p = |\mathcal{C}_i| = p_0 - k_i = p_0 - n + 1.$$

In $\mathcal{L}_i$ gibt es keinen Block, der mit $p-1$ Punkten aus $\mathcal{C}_i$ inzidiert. Weil nämlich in $(\mathcal{C}_i, \mathcal{L}_i, I_i)$ (R.1) erfüllt ist, würde diese Eigenschaft dann allen Blöcken zukommen, das hieße aber, daß jeder Block aus $\mathcal{L}_i$ mit genau einem Punkt aus $\mathcal{C}_i$ nicht inzidieren würde, was die Trivialität von $(\mathcal{C}_i, \mathcal{L}_i, I_i)$ zur Folge hätte.

Wähle nun aus $\mathcal{C}_i$ eine $p-1$ -elementige Punktmenge $\mathcal{Z}$ und aus $\mathcal{C}_k$ zwei Punkte x_1, x_2 , $k \neq i$. Dann gilt

$$(\mathcal{Z}) = (\mathcal{C}_i) = \bigcup_{j=1}^q \mathcal{L}_j$$

$$\begin{aligned} \text{und } (\{x_1, x_2\} \cup \mathcal{Z} \cup \bigcup_{j=1, j \neq i, k}^q \mathcal{C}_j) &= (\{x_1, x_2\}) \cap (\mathcal{Z}) \cap \bigcup_{j=1, j \neq i, k}^q (\mathcal{C}_j) \\ &= (\{x_1, x_2\}) \cap \mathcal{L}_k \end{aligned}$$

Aus $|\{x_1, x_2\} \cup \mathcal{Z} \cup \bigcup_{j=1, j \neq i, k}^q \mathcal{C}_j| = 2 + (p-1) + (k_i - p) = k_i + 1 = n$ folgt $|(\{x_1, x_2\}) \cap \mathcal{L}_k| = m-1$

Also inzidieren $\{x_1, x_2\}$ mit genau $m-1$ Blöcken aus $\mathcal{L}_k$.

Nach Lemma 10 inzidiert aber schon jeder einzelne Punkt x aus $\mathcal{C}_k$ mit genau $m-1$ Blöcken. Daraus folgt, daß alle Punkte aus $\mathcal{C}_k$ mit denselben $m-1$ Blöcken inzidieren, im Widerspruch zur Normalität von $(\mathcal{C}_k, \mathcal{L}_k, I_k)$

VI. Freie Erweiterung

Nach dem Bisherigen müssen wir also die Frage nach der Existenz endlicher, normaler, nichttrivialer Inzidenzstrukturen, die (R, m) und $(\bar{R}, n)$ erfüllen mit

$$1 < \min(n, m) \text{ und } 2 < \max(n, m),$$

verneinen.

Für ebensolche, unendliche Inzidenzstrukturen haben wir bisher die folgenden Schritte erledigen können:

1. Nichtexistenz im Falle $p_m < n-1$ bzw. $b_n < m-1$
(Lemma 5 und Satz 11)
2. Nichtexistenz im Falle $p_m = n-1$ bzw. $b_n = m-1$
und dem Vorhandensein einer einelementigen Äquivalenzklasse von " $\sim$ ". (Satz 13 und Lemma 9)
3. Nichtexistenz im Falle $p_m = n-1$ bzw. $b_n = m-1$ und
dem Vorhandensein von zwei Äquivalenzklassen von " $\sim$ "
mit mindestens zwei Punkten. (Satz 15)

In den übrigen Fällen wollen wir nun die Existenz nachweisen. Zu diesem Zwecke sei (P_0, B_0, I_0) eine Inzidenzstruktur mit den Eigenschaften:

(R', m) : Mit je m Blöcken inzidieren höchstens p_m Punkte.

$(\bar{R}', n)$: Mit je n Punkten inzidieren höchstens b_n Blöcke.

Es sei $p_m \geq n-1$ und $b_n \geq m-1$ und $p_m = n-1 \iff b_n = m-1$.

Sind dann $X_1, \dots, X_m$ m verschiedene Blöcke, die mit genau k Punkten gleichzeitig inzidieren ($k \leq p_m$), so adjungiere zu P_0 noch $p_m - k$ Punkte. Diese sollen genau mit $X_1, \dots, X_m$ inzidieren. Diese Konstruktion wird nun für alle möglichen m -elementigen Blockmengen gemacht. Bezeichnet man mit Q_0 die Menge aller so adjungierten Punkte und mit $P_1 = Q_0 \cup P_0$, dann erfüllt die so entstandene Inzidenzstruktur (P_1, B_0, I_1) die Bedingungen (R, m) und $(\bar{R}', n)$.

Beweis: Auf Grund der Definition gilt natürlich (R, m) .

Nehmen wir an, daß $(\bar{R}', n)$ nicht erfüllt ist, dann gibt es n Punkte aus P_1 : $x_1, \dots, x_n$, die mit mindestens $b_n + 1$ Blöcken inzidieren. Daraus schließt man, daß nicht alle Punkte $x_1, \dots, x_n$ aus P_0 sein können. Es sei o.B.d.A. $x_1 \in Q_0$.

Dann inzidiert x_1 genau mit den Blöcken $X_1, \dots, X_m$.

Aus $(\{x_1, \dots, x_n\}) \subset (\{x_1\}) \Rightarrow b_{n+1} \leq m \Rightarrow b_n = m-1$

$\Rightarrow (\{x_1, \dots, x_n\}) = (\{x_1\}) \Rightarrow \{x_1, \dots, x_n\} \cap \{X_1, \dots, X_m\}$

Das stellt aber einen Widerspruch zu $p_m = n-1$ dar.

Analog bildet man nun aus (P_1, B_0, I_1) eine Inzidenzstruktur (P_1, B_1, I_2) , indem man passende Blöcke adjungiert, sodaß (P_1, B_1, I_2) die Bedingungen (R'.m) und ($\bar{R}$.n) erfüllt.

Durch vollständige Induktion definiert man sich die Mengen $P_i, B_i, i = 1, 2, \dots$, und die zugehörige Inzidenz.

Setzt man

$$P = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i, \quad B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i, \quad I = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$$

so gelten in der Inzidenzstruktur:

(R.m) : Mit je m Blöcken inzidieren genau p_m Punkte.

($\bar{R}$.n) : Mit je n Punkten inzidieren genau b_n Blöcke.

Beweis: Es seien $X_1, \dots, X_m \in B$. Dann gibt es ein kleinstes $i \in \mathbb{N}$, sodaß $X_1, \dots, X_m \in B_i$. Also inzidieren $X_1, \dots, X_m$ mit genau p_m Punkten aus P_{i+1} , d.h. $X_1, \dots, X_m$ inzidieren mit mindestens p_m Punkten aus P .

Nimmt man an, daß es noch einen weiteren Punkt in P gibt, der mit $X_1, \dots, X_m$ inzidiert, so müsste eine Teilstruktur (P_r, B_r, I_{2r}) existieren, in der $X_1, \dots, X_m$ mit p_m+1 Punkten inzidieren würde, was nicht wahr ist. Damit ist die Richtigkeit der Behauptung gezeigt.

VII. Inzidenzstrukturen ohne die Bedingung (N)

Zum Schluß dieser Arbeit wollen wir noch untersuchen, welche Inzidenzstrukturen sich ergeben, wenn wir die Regularitätsbedingungen beibehalten, jedoch auf die Bedingung der Normalität verzichten.

Es sei also (R, m) und $(\bar{R}, n)$ erfüllt mit $\min(n, m) > 1$.

Es sei $B \in \mathcal{B}$ ein Block mit $(\{B\}) = \mathcal{P}$.

Ist dann $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \setminus \{B\}$ und $|\mathcal{L}| = m-1$, so gilt

$$(\mathcal{L}) = (\mathcal{L}) \cap (\{B\}) = (\mathcal{L} \cup \{B\})$$

$$\text{also} \quad [\mathcal{L}] = [\mathcal{L} \cup \{B\}] = p_m.$$

Es sei nun $X \in \mathcal{B}$, $X \notin \mathcal{L} \cup \{B\}$

$$\text{Dann gilt} \quad (\mathcal{L}) \cap (\{X\}) = (\mathcal{L} \cup \{X\}) \subset (\mathcal{L}).$$

$$\text{Weil aber} \quad [\mathcal{L} \cup \{X\}] = [\mathcal{L}] = p_m \quad \text{ist,}$$

$$\text{gilt sogar} \quad (\mathcal{L}) \cap (\{X\}) = (\mathcal{L})$$

$$X I (\mathcal{L})$$

$$\text{Weil auch} \quad B I (\mathcal{L})$$

$$\text{und} \quad \mathcal{L} I (\mathcal{L}),$$

so gilt insgesamt

$$\mathcal{B} I (\mathcal{L}).$$

Es gibt also genau p_m Punkte, die mit allen Blöcken inzidieren. Aus $p_m \geq 1$ schließt man nun dual, daß es genau b_n Blöcke gibt, die mit allen Punkten inzidieren.

Nimmt man nun an, es sei

$$b_n \geq m,$$

so gibt es m Blöcke die mit allen Punkten inzidieren,

$$\text{d.h.} \quad p_m = p_0.$$

Es muß also jeder Punkt mit jedem Block inzidieren,

$$\text{d.h.} \quad I = \mathcal{P} \times \mathcal{B}$$

Dasselbe Ergebnis ergibt sich natürlich auch aus der Annahme $p_m \geq n$.

Wir können somit bei den weiteren Untersuchungen annehmen,

$$\text{daß} \quad p_m < n \quad \text{und} \quad b_n < m.$$

Sei $e \in \mathcal{P}$, $|e| = p_m$ und $e \in \mathcal{B}$; $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$, $|\mathcal{L}| = b_n$ und $\mathcal{L} \in \mathcal{P}$.
Ist dann $\mathcal{S} \subset \mathcal{B} - \mathcal{L}$ und $|\mathcal{S}| = m - b_n$, so gilt

$$(\mathcal{S}) = (\mathcal{S}) \cap (\mathcal{L}) = (\mathcal{S} \cup \mathcal{L})$$

also $[\mathcal{S}] = p_m$.

Wegen $(\mathcal{S}) \supset e$ folgt sogar $(\mathcal{S}) = e$,
d.h., daß $\mathcal{S}$ mit keinem Punkt aus $\mathcal{P} - e$ inzidiert.

Für die Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}', \mathcal{B}', \mathcal{I}')$ mit

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P} - e, \mathcal{B}' = \mathcal{B} - \mathcal{L}, \mathcal{I}' = \mathcal{I} \cap \mathcal{P}' \times \mathcal{B}'$$

können wir also schließen:

Für jede $m - b_n$ -elementige Blockmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}'$ gilt

$$[\mathcal{S}]' = 0, \quad [\mathcal{S}]' = |(\mathcal{S}) \cap \mathcal{P}'|$$

Für jede $n - p_m$ -elementige Punktmenge $\mathcal{Z} \subset \mathcal{P}'$ gilt

$$[\mathcal{Z}]' = 0, \quad [\mathcal{Z}]' = |(\mathcal{Z}) \cap \mathcal{B}'|$$

Ist umgekehrt $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ eine Inzidenzstruktur, in der gilt:

Für jede i -elementige Blockmenge $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$ gilt $[\mathcal{L}] = 0$.

Für jede j -elementige Punktmenge $e \subset \mathcal{P}$ gilt $[e] = 0$.

so erhält man durch Hinzufügen von Blöcken $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_g$ zu $\mathcal{B}$
und von Punkten $x_1, \dots, x_f$ zu $\mathcal{P}$ und Erklärung der folgenden Inzidenz

$$\mathcal{I}' = \{x_1, \dots, x_f\} \times \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_g\} \cup \{x_1, \dots, x_f\} \times \mathcal{B} \cup \\ \mathcal{P} \times \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_g\} \cup \mathcal{I}$$

eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}', \mathcal{B}', \mathcal{I}')$

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{x_1, \dots, x_f\}, \mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_g\}$$

die die Regularitätsbedingungen $(R.i+g)$ mit $p_{i+g} = f$ und
 $(\bar{R}.j+f)$ mit $b_{j+f} = g$ erfüllt.

Beispiele dafür sind alle Inzidenzstrukturen, in denen

$$i-1 = \max \{ |x| \mid x \in \mathcal{P} \} \quad \text{und} \quad j-1 = \max \{ |X| \mid X \in \mathcal{B} \}$$

existieren.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Dembowski, P.: Eigenschaften endlicher Inzidenzstrukturen. Math. Zeitschr. 75, Seite 265-270 (1961).
- [2] Dembowski, P.: Finite geometries. Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete Bd. 44 (1968).
- [1] Pickert, G.: Projektive Ebenen. Grundlehren der math. Wiss. Bd. 80. Springer-Verlag 1955.

Lebenslauf

Am 14. Oktober 1942 wurde ich, Joachim Röhmel, in Cottbus als Sohn des Diplom-Handelslehrers Günther Röhmel und seiner Ehefrau Gabriele, geb. Adolph, geboren.

In Cottbus besuchte ich von 1949 bis 1957 die Grundschule, anschließend in Westberlin das Hugo-Eckener-Gymnasium, wo ich 1962 das Zeugnis der Reife erwarb.

Meine mathematische Ausbildung erhielt ich an der Freien Universität Berlin, wo ich in der Zeit vom Wintersemester 1962/63 bis Wintersemester 1969/70 immatrikuliert war. Im Juni 1969 erhielt ich das Diplom in Mathematik. Die Diplomarbeit: "Anwendungen der Bergman'schen Kernfunktion auf Abbildungen durch analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher." fertigte ich unter der Anleitung von Herrn Prof. Dr. Dinghas an. Meine akademischen Lehrer in den Fächern Mathematik und Physik waren die Professoren:

Dinghas, Grottemeyer, Honerjäger, Leichtweiß, Lassen, Lenz, Münzner, Orsinger, Pachale, Päsler, Penzlin, Ringel, Rüßmann, Stöhr, Wünsche.

Seit Juni 1969 bin ich am I. Mathematischen Institut als Wissenschaftlicher Assistent beschäftigt, und zwar bis April 1970 als Angestellter mit einem Teilzeitvertrag von 120 Stunden im Monat, und seit Mai 1970 als Beamter auf Widerruf.

Seit Juli 1969 bin ich mit Sabine Röhmel-Brosze, geb. Brosze, verheiratet. Im April wurde unsere Tochter Julia geboren.

